Abschätzung der Endmasse von Feuerkugeln

Autor und Referent: Beat Booz, Frick, 11.06.2022

Fachgruppe Meteorastronomie

Feuerkugel mit Restmasse?

Feuerkugel mit Restmasse?

Bei einer hellen Feuerkugel interessiert, nebst der Trajektorien- und Bahnberechnung, ob diese zu einem Meteoritenfall geführt hat.

War die Anfangsmasse des Meteoroiden gross genug um die Ablationsphase zu überstehen?

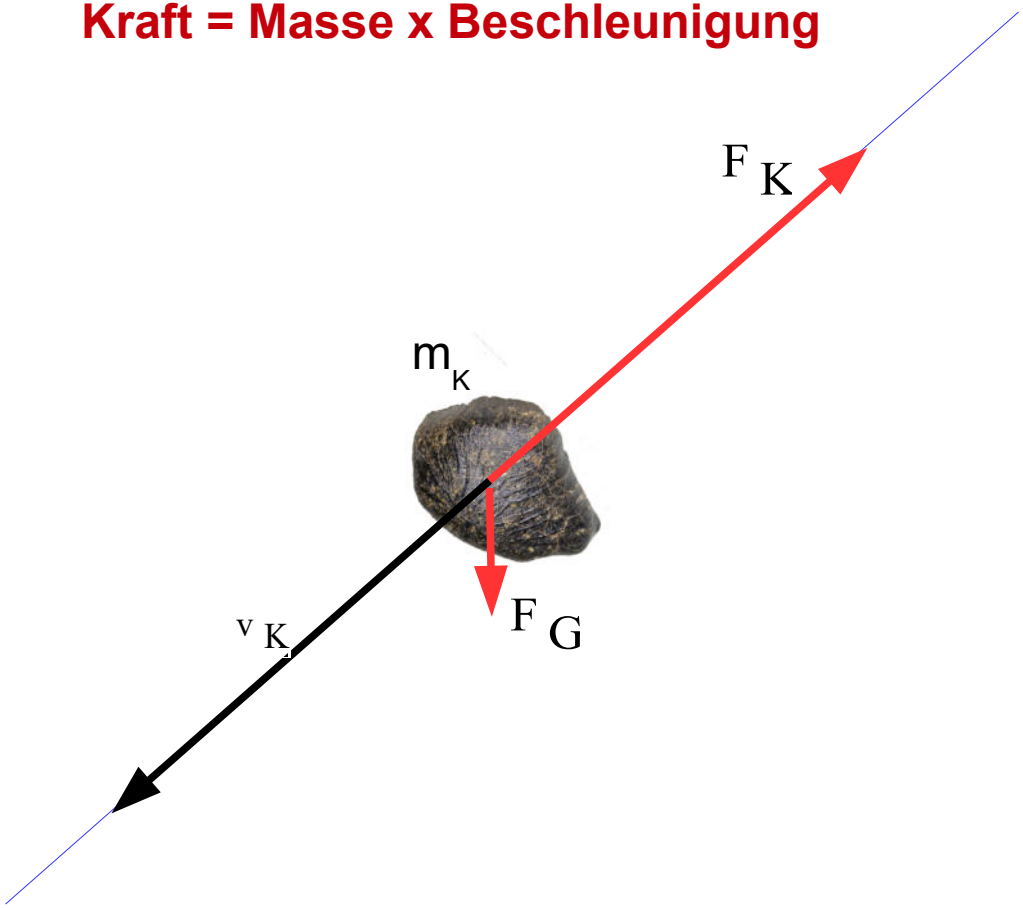
Wurde der Meteoroid, oder dessen einzelne Fragmente, genügend abgebremst um in den Dunkelflug (keine weitere Massenabnahme) überzugehen, oder fand das Aufleuchten ein Ende weil alles Material aufgerieben wurde?

Wie kann man dies herausfinden?

Hierzu helfen ein wenig Physik und Mathematik weiter...

Kräfte auf den Meteor

Nach dem 2. Newtonschen Gesetz gilt:
Kraft = Masse x Beschleunigung



F_K: Widerstandskraft
S: Querschnittsfläche
a_K: Beschleunigung (negativ!)
c_{wK}: Widerstandszahl
ρ_{Luft}: Luftdichte
v_K: Geschwindigkeit
m_K: Meteormasse

Die Gewichtskraft ist, im Vergleich zur Luft-Widerstandskraft, verschwindend klein, und kann deshalb für unsere Abschätzung vernachlässigt werden. Trajektorien werden für die Meteorberechnung in der Regel als gerade vorausgesetzt.

Luftwiderstandskraft (entgegen der Flugrichtung):

$$F_K = \frac{1}{2} \cdot c_{wK} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_K^2 \cdot S = -m_K \cdot a_K = -m_K \cdot \frac{dv_K}{dt}$$

Gewichtskraft:

$$F_G = m_K \cdot g_h$$

$$g_h = g \cdot \frac{r_{Erde}^2}{(r_{Erde} + y)^2}$$

Weitere Zusammenhänge zwischen Grössen für unterschiedliche Meteor-Formen

	Kugelform:	**Würfelform:**	**„Reale“ Form (Mittelwert Kugel/Würfel):**
Volumen:	$Vol_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_K^3 = \frac{m_K}{\rho_K}$	$Vol_K = r_K^3 = \frac{m_K}{\rho_K}$	
Kugelradius bzw Würfel-Kantenlänge:	$r_K = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m_K}{4 \cdot \pi \cdot \rho_K}}$	$r_K = \sqrt[3]{\frac{m_K}{\rho_K}}$	
Quer-schnittsfläche des Meteoroiden:	$S = r_K^2 \cdot \pi$	$S = r_K^2$	$S = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{3 \cdot m_K}{4 \cdot \pi \cdot \rho_K}}\right)^2 \cdot \pi + \left(\sqrt[3]{\frac{m_K}{\rho_K}}\right)^2}{2}$

Für die Meteormasse gilt:

$$m_K = -\frac{c_{wK} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_K^2}{2 \cdot a_K} \cdot S$$

ρ_K : Dichte des Meteoroiden

Setzt man nun in die Gleichung für m_K die Querschnittsfläche S, und in jener r_K ein, so erhält man die formabhängigen Gleichungen, welche nach der Meteormasse m_K aufgelöst werden können (siehe nächste Seite):

Meteormasse für Kugelform

Für Kugelform:

$$m_K = -\frac{c_{wK} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_K^2}{2 \cdot a_K} \cdot S \qquad S = r_K^2 \cdot \pi \qquad r_K = \left(\frac{3 \cdot m_K}{4 \cdot \pi \cdot \rho_K} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Eingesetzt:

$$m_K = -\frac{c_{wK} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_K^2}{2 \cdot a_K} \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot m_K}{4 \cdot \pi \cdot \rho_K} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \pi \right]$$

Aufgelöst nach m_K:

$$m_K = -\frac{9 \cdot \pi}{128} \cdot \frac{c_{wK}^3 \cdot \rho_{Luft}^3 \cdot v_K^6}{\rho_K^2 \cdot a_K^3}$$

$$m_K = -0.220893 \cdot \frac{c_{wK}^3 \cdot \rho_{Luft}^3 \cdot v_K^6}{\rho_K^2 \cdot a_K^3}$$

ρ_K: Meteordichte
a_K: Beschleunigung (negativ!)
c_{wK}: Widerstandszahl
ρ_{Luft}: Luftdichte
v_K: Geschwindigkeit
m_K: Meteormasse

Meteormasse für Würfelform

Für Würfelform:

$$m_K = -\frac{c_{wK} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_K^2}{2 \cdot a_K} \cdot S \qquad S = r_K^2 \qquad r_K = \left(\frac{m_K}{\rho_K}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Eingesetzt:

$$m_K = -\frac{c_{wK} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_K^2}{2 \cdot a_K} \cdot \left(\frac{m_K}{\rho_K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Aufgelöst nach m_K:

$$m_K = -\frac{1}{8} \cdot \frac{c_{wK}^3 \cdot \rho_{Luft}^3 \cdot v_K^6}{\rho_K^2 \cdot a_K^3}$$

$$m_K = -0.125 \cdot \frac{c_{wK}^3 \cdot \rho_{Luft}^3 \cdot v_K^6}{\rho_K^2 \cdot a_K^3}$$

ρ_K: Meteordichte
a_K: Beschleunigung (negativ!)
c_{wK}: Widerstandszahl
ρ_{Luft}: Luftdichte
v_K: Geschwindigkeit
m_K: Meteormasse

Meteormasse für Mittelwert Kugel/Würfel

Für Mittelwert Kugel/Würfel:

$$m_K = -\frac{c_{wK} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_K^2}{2 \cdot a_K} \cdot S \qquad S = \frac{\left(\frac{3 \cdot m_K}{4 \cdot \pi \cdot \rho_K}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \pi + \left(\frac{m_K}{\rho_K}\right)^{\frac{2}{3}}}{2}$$

Eingesetzt:

$$m_K = -\frac{c_{wK} \cdot \rho_{Luft} \cdot v_K^2}{2 \cdot a_K} \cdot \frac{\left(\frac{3 \cdot m_K}{4 \cdot \pi \cdot \rho_K}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \pi + \left(\frac{m_K}{\rho_K}\right)^{\frac{2}{3}}}{2}$$

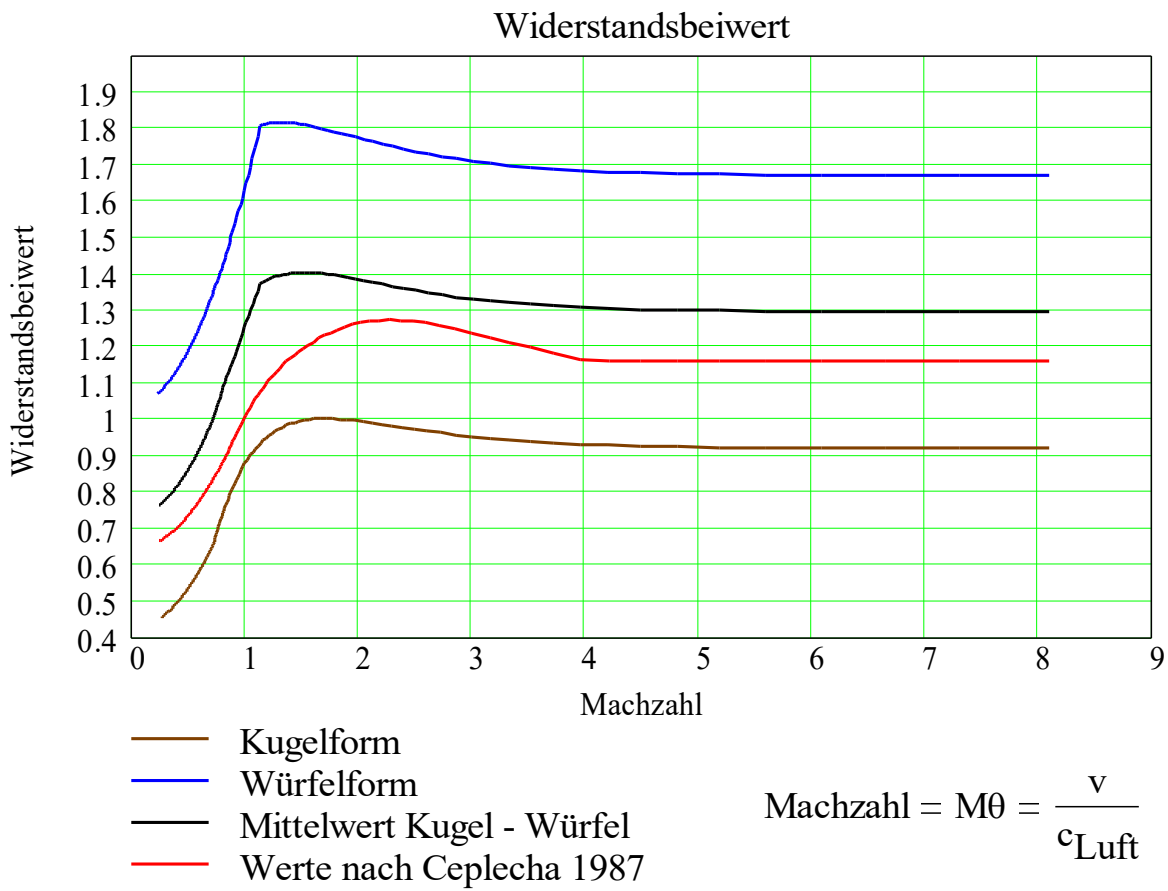
Aufgelöst nach m_K:

$$m_K = -\frac{16 + 9 \cdot \pi + 12 \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot \pi^{\frac{1}{3}} + 18 \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot \pi^{\frac{2}{3}}}{1024} \cdot \frac{c_{wK}^3 \cdot \rho_{Luft}^3 \cdot v_K^6}{\rho_K^2 \cdot a_K^3}$$

$$m_K = -0.168424 \cdot \frac{c_{wK}^3 \cdot \rho_{Luft}^3 \cdot v_K^6}{\rho_K^2 \cdot a_K^3}$$

ρ_K: Meteordichte
a_K: Beschleunigung (negativ!)
c_{wK}: Widerstandszahl
ρ_{Luft}: Luftdichte
v_K: Geschwindigkeit
m_K: Meteormasse

Widerstandszahl (Drag coefficient) in Abhängigkeit von der Form und der Mach-Zahl:



$$\text{Machzahl} = M\theta = \frac{v}{c_{Luft}}$$

Nach „Constraining the Drag Coefficients of Meteors in Dark Flight“ von R. T. Carter; P. S. Jandir; M. E. Kress.

Link:
https://core.ac.uk/download/pdf/42753754.pdf

Da während des Aufleuchtens einer Feuerkugel (Ablationsphase) die Geschwindigkeit nicht kleiner als Mach 6 wird, muss keine Geschwindigkeitsabhängigkeit der Widerstandszahl berücksichtigt werden. Die Widerstandszahlen sind wie folgt:

Kugel = 0.92 Würfel = 1.67 Mittelwert Kugel/Würfel = 1.295

Dichte der Meteoriten

Chondrite	Typ	Dichte [g/cm3]		
		mittl.	min.	max
Gewöhnliche Chondrite	H	**3.40**	2.80	3.80
	L	**3.35**	2.50	3.96
	LL	**3.21**	2.38	3.49
Kohlige Chondrite	CI	**2.11**	-	-
	CM	**2.12**	1.79	2.40
	CR	**3.10**	-	-
	CO	**2.95**	2.79	3.09
	CV	**2.95**	2.69	3.25
	CH	**3.44**		
	CK	**3.47**	3.46	3.49
Enstatit Chondrite	E	**-**	-	-
	EH	**3.72**	3.71	3.73
	EL	**3.55**	3.48	3.62

Achondrite	Dichte [g/cm3]		
	mittl.	min.	max
Aubrite	**3.12**	2.97	3.33
Diogenite	**3.26**	3.11	3.44
Eukrite	**2.86**	2.74	2.95
Howardite	**3.02**	2.80	3.16
Ureilite	**3.05**	2.81	3.21
Shergottite (Mars)	**3.10**	3.07	3.12
Chassignite (Mars)	**3.32**		
Nakhlite (Mars)	**3.15**	3.10	3.20
Mond		2.70*	3.80*

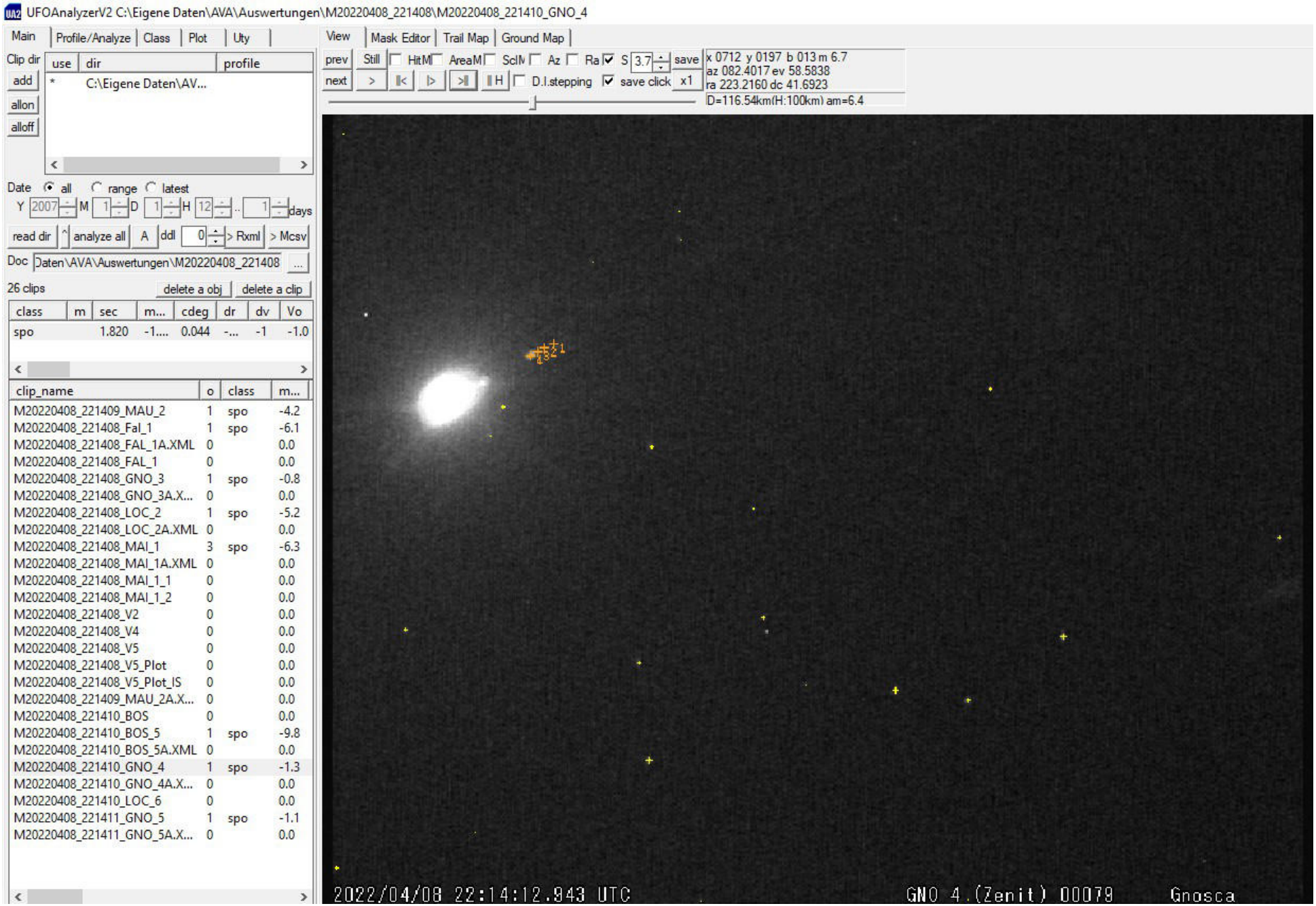
Stein-Eisen / Eisen	Dichte [g/cm3]		
	mittl.	min.	max
Pallasite	**4.76**	4.64	4.89
Mesosiderite	**4.25**	4.23	4.27
Eisen		7	8

Angaben nach: Density data primarily from Britt and Consolmagno (2003).

*Estimate. Feldspathic meteorites will have lower density, basaltic meteorites with have higher density. See Chemical Classification of Lunar Meteorites.

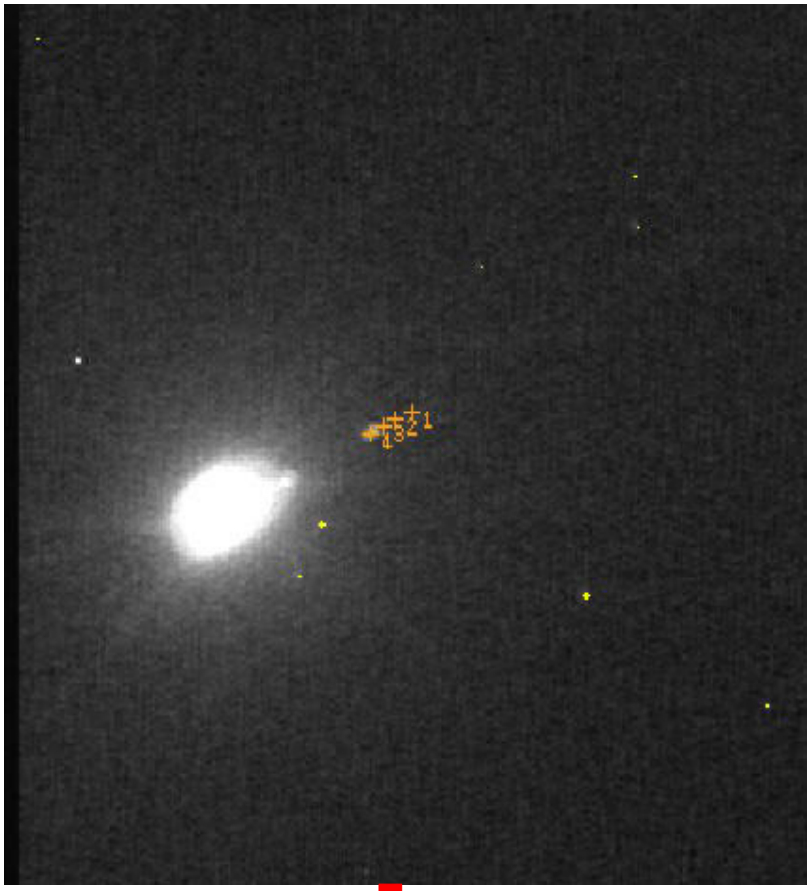
Höhe, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Höhe, Geschwindigkeit und Beschleunigung

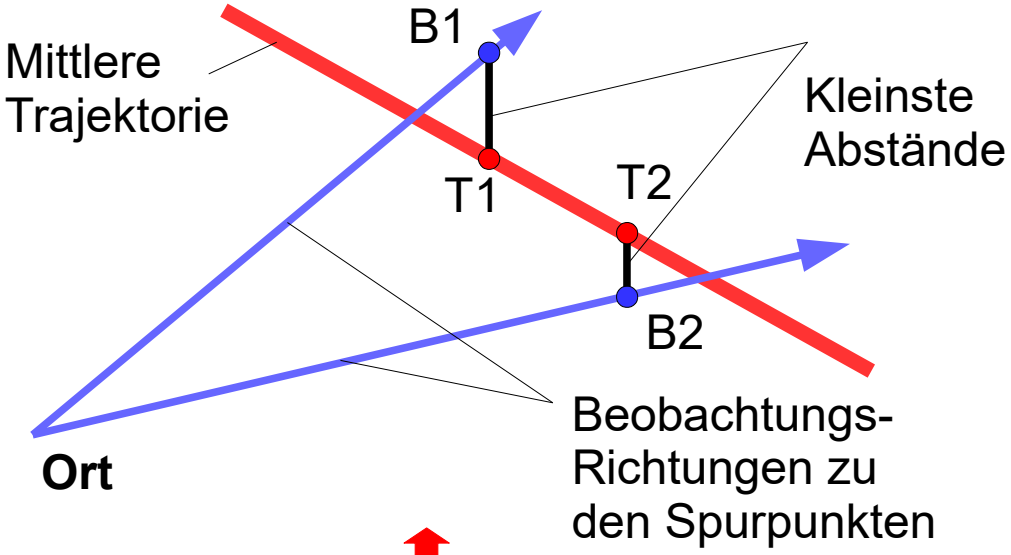


Höhe, Geschwindigkeit und Beschleunigung

1. Manuelle Vermessung:



2. Rechtwinklige Projektion der vermessenen Punkte auf die mittlere Trajektorie:
-> Höhe
-> Weg in der Zeit zwischen den Bildern = Geschwindigkeit.
-> Änderung der Geschwindigkeit = Beschleunigung



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	_Y_ut	_M_ut	_D_ut	_h_ut	_m_ut	_s_ut	_pos	_x	_y	_az	_ev	_ra	_dec	_lid	_sid	_long	_lat	_alt			
2	2022	4	8	22	14	10.82	1	167.9	408.7	248.12	73.75	160.053	38.516	_GNO	_4	9.02	46.23	260	2162502426	2208860502	3020273228
3	2022	4	8	22	14	10.82	2	160.9	405.6	249.79	73.36	159.301	38.689	_GNO	_4	9.02	46.23	260	431682438	611567842	682203920
4	2022	4	8	22	14	10.82	3	156.3	402.5	251.1	73.13	158.788	38.877	_GNO	_4	9.02	46.23	260	3904463434	1755293382	2501498140
5	2022	4	8	22	14	10.82	4	150.9	400.2	252.29	72.81	158.201	38.997	_GNO	_4	9.02	46.23	260	532619622	2163974914	3759632112
6																					

Höhe, Geschwindigkeit und Beschleunigung

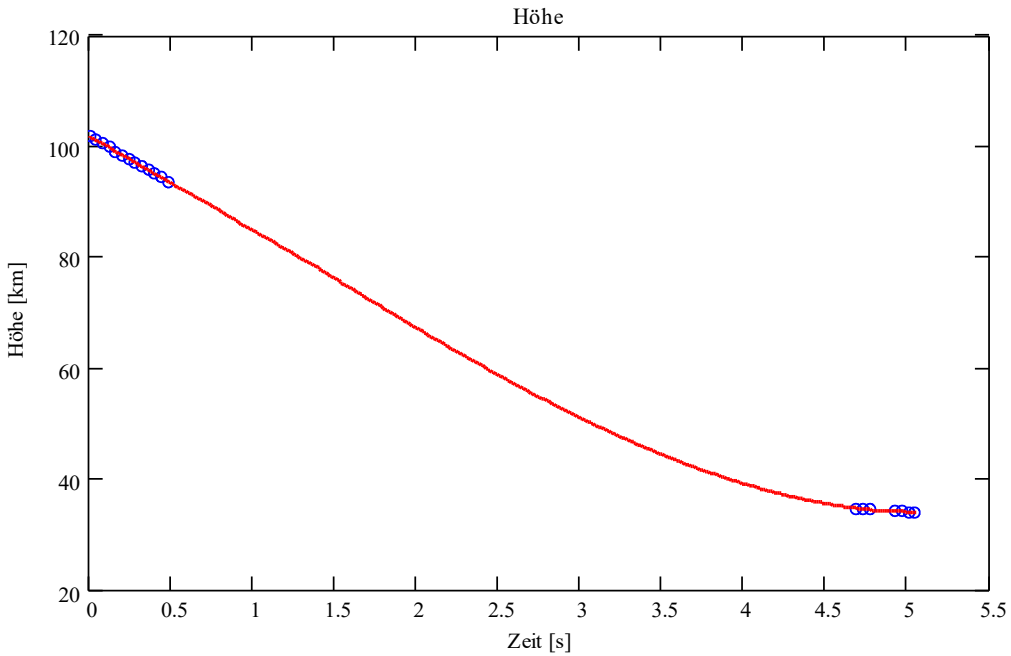
Um die Genauigkeit der manuellen Vermessung einzelner Punkte zu erhöhen bzw zu kontrollieren, kann nach Möglichkeit die Ablationsberechnung nach „A New Method for Entry Dynamics Determination Based on Observations and Results of Calculations“ von M. I. Gritsevich angewendet werden. Mit dieser erhält man zusammen mit dem Geschwindigkeitsverlauf auch den Beschleunigungsverlauf.

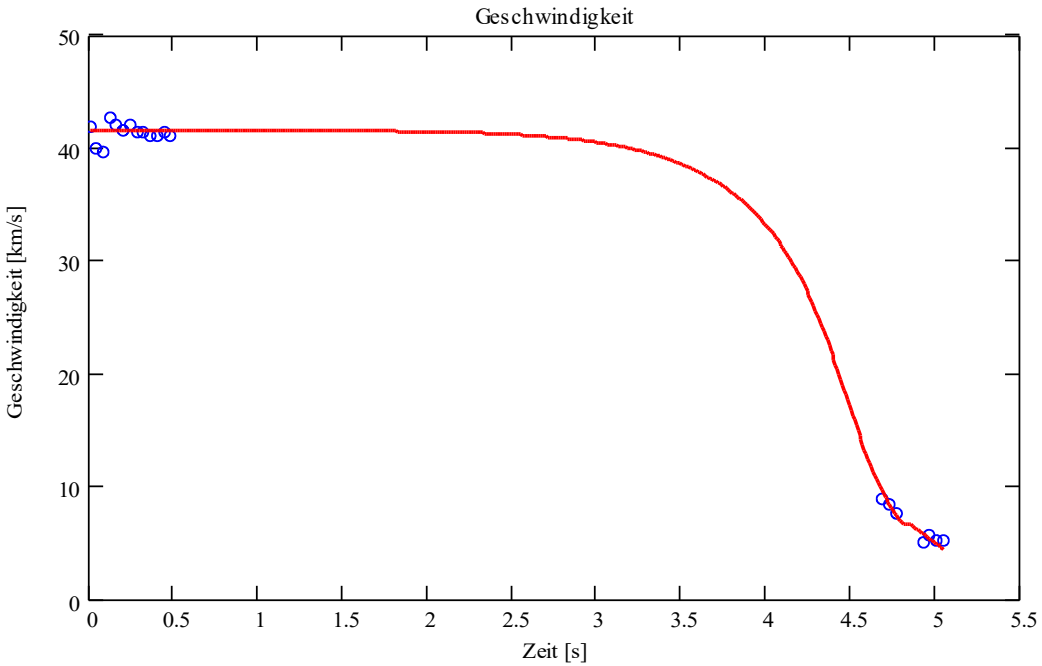
Links:
https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/2010pim7.conf...13G/ADS_PDF
https://www.imo.net/imcs/imc2010/talks/Gritsevich.pdf

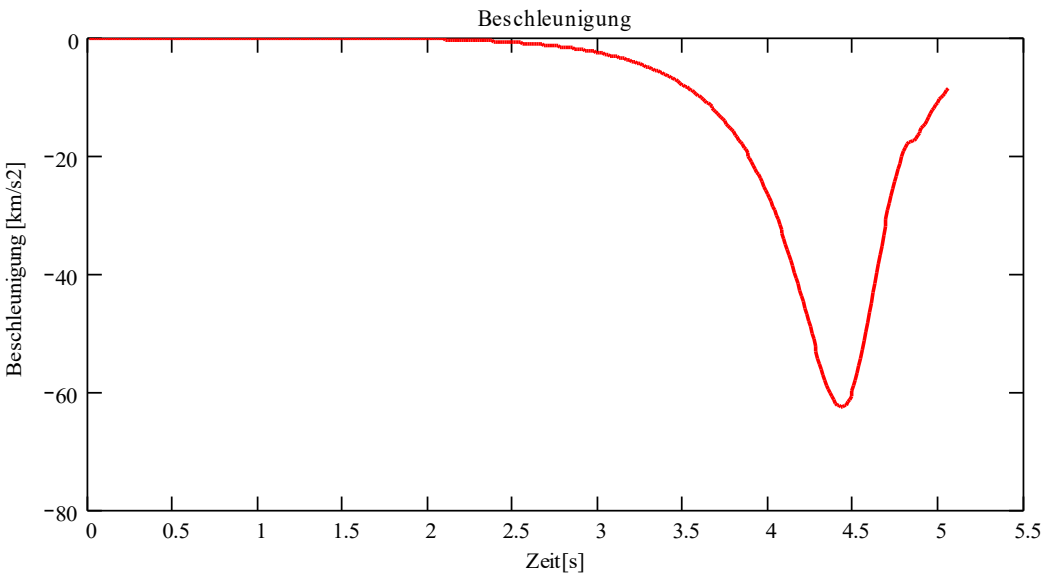
Siehe dazu auch „Einführung in die Thematik der Ablations- und Dunkelflugphase bei Meteoritenfällen“:
http://www.meteorastronomie.ch/intranet/literatur/protocols/20150328_Ablation_Dunkelflug_BBooz.pdf

Beispiel: M20220408_221408.
Diese Feuerkugel konnte nur zu Beginn und gegen das Ende gut vermessen werden, da die grosse Helligkeit den Hauptteil der Spur überstrahlte. Mit der Ablationsberechnung und der Anfangsgeschwindigkeit von 41.571 km/s konnten die Koeffizienten zu α = 28.997 und β = 3.467 bestimmt werden. Mit diesen Grössen wird eine optimierte Kurve durch die vermessenen Punkte am Anfang und Ende der Ablationsphase gelegt.

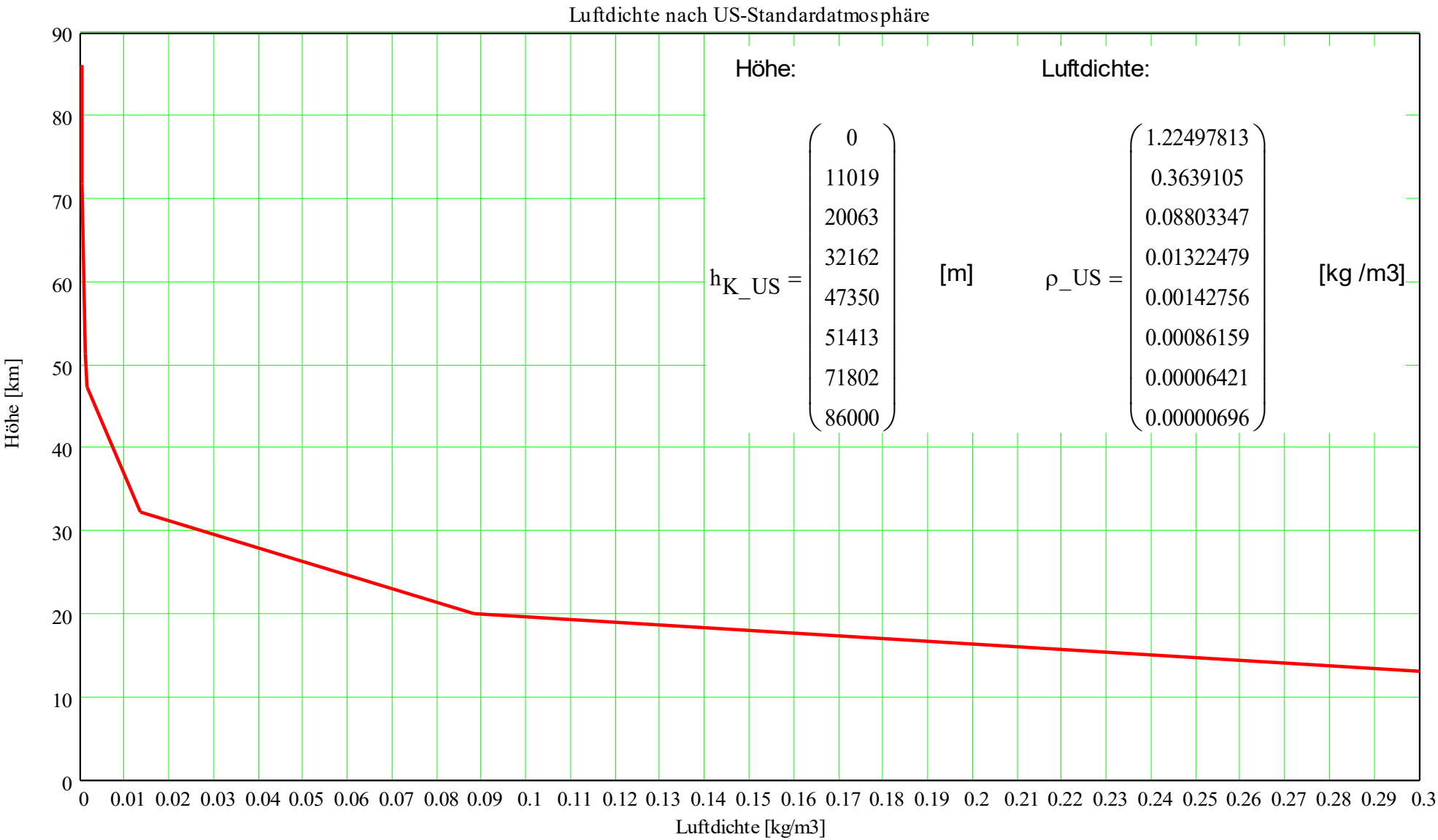
Ablationskurven von M20220408_221408







Luftdichte nach US-Standardatmosphäre



Höhe:

$$h_{K_US} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11019 \\ 20063 \\ 32162 \\ 47350 \\ 51413 \\ 71802 \\ 86000 \end{pmatrix} \quad [m]$$

Luftdichte:

$$\rho_US = \begin{pmatrix} 1.22497813 \\ 0.3639105 \\ 0.08803347 \\ 0.01322479 \\ 0.00142756 \\ 0.00086159 \\ 0.00006421 \\ 0.00000696 \end{pmatrix} \quad [kg\ /m3]$$

Zusammenfassung der Formeln für die Meteormasse

Für Kugelform:

$$m_K = -0.220893 \cdot \frac{c_{wK}^3 \cdot \rho_{Luft}^3 \cdot v_K^6}{\rho_K^2 \cdot a_K^3}$$

$c_{wK} = 0.92$

Für Würfelform:

$$m_K = -0.125 \cdot \frac{c_{wK}^3 \cdot \rho_{Luft}^3 \cdot v_K^6}{\rho_K^2 \cdot a_K^3}$$

$c_{wK} = 1.67$

Für Mittelwert Kugel/Würfel:

$$m_K = -0.168424 \cdot \frac{c_{wK}^3 \cdot \rho_{Luft}^3 \cdot v_K^6}{\rho_K^2 \cdot a_K^3}$$

$c_{wK} = 1.295$

Die häufigsten Meteorite sind die gewöhnlichen Chondrite. Diese haben eine Dichte von ca. 3500 kg/m3. Die untere Dichte-Grenze von ca. 2100 kg/m3 bilden die kohligen Chondrite, die obere Grenze die Eisenmeteorite mit etwa 8000 kg/m3.

m_K: Meteormasse [kg]

v_K: Geschwindigkeit [m/s]

a_K: Beschleunigung (negativ!) [m/s

ρ_{Luft}: Luftdichte (=f(Höhe)!) [kg/m^3]

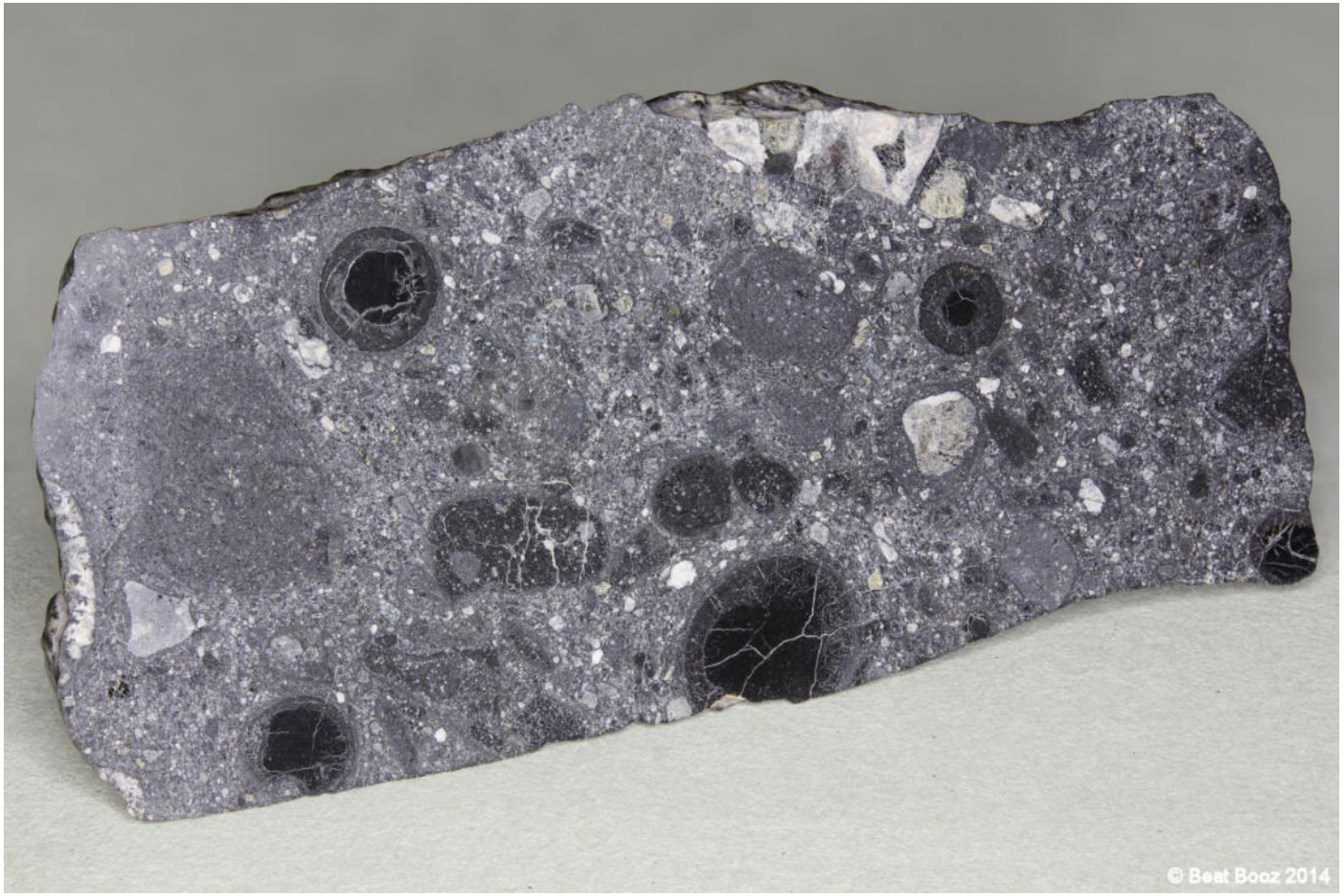
c_{wK}: Widerstandszahl [-]

ρ_K: Meteordichte [kg/m^3]

Ergebnisse Berechnungsbeispiele

	Feuerkugelereignis	Neuschwanstein	M20150315_194406	M20200502_231248
	Höhe [m]	16040	27840	27918
	Geschwindigkeit [m/s]	2400	5500	3944
	Beschleunigung [m/s2]	-2800	-1600	-3476
	Dichte Meteor [kg/m3]	3500	3500	3500
	Luftdichte [kg/m3]	0.168	0.024	0.023
Kugelform	Widerstandszahl [-]	0.92	0.92	0.92
	Meteormasse [kg]	**0.579**	**1.241**	**0.016**
Würfelform	Widerstandszahl [-]	1.67	1.67	1.67
	Meteormasse [kg]	**1.96**	**4.2**	**0.054**
Mittelwert Kugel/Würfel	Widerstandszahl [-]	1.295	1.295	1.295
	Meteormasse [kg]	**1.231**	**2.639**	**0.034**

Ergebnisse Berechnungsbeispiele

		M20220408_221408				
	Feuerkugelereignis	F6 GNO5 R0 Ablation	F6 GNO5 R0	F6 GNO5 R1	F6 GNO5 R2	F7 GNO5
	Höhe [m]	33940	34257	34620	34300	34680
	Geschwindigkeit [m/s]	4428	5000	5660	5000	6247
	Beschleunigung [m/s2]	-8707	-8707	-16276	-3000	-52510
	Dichte Meteor [kg/m3]	3500	3500	3500	3500	3500
	Luftdichte [kg/m3]	0.011	0.01	0.01	0.01	0.01
Kugelform	Widerstandszahl [-]	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92
	Meteormasse [kg]	**0.0002**	**0.0003**	**0.0001**	**0.008**	**0**
Würfelform	Widerstandszahl [-]	1.67	1.67	1.67	1.67	1.67
	Meteormasse [kg]	**0.0006**	**0.0012**	**0.0003**	**0.028**	**0**
Mittelwert Kugel/Würfel	Widerstandszahl [-]	1.295	1.295	1.295	1.295	1.295
	Meteormasse [kg]	**0.0004**	**0.0007**	**0.0002**	**0.018**	**0**

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!